Varieties of Metric and Quantitative Algebras

蓮尾研 M2 日野 亘

修士論文の貢献

metric / quantitative algebra の variety theorem

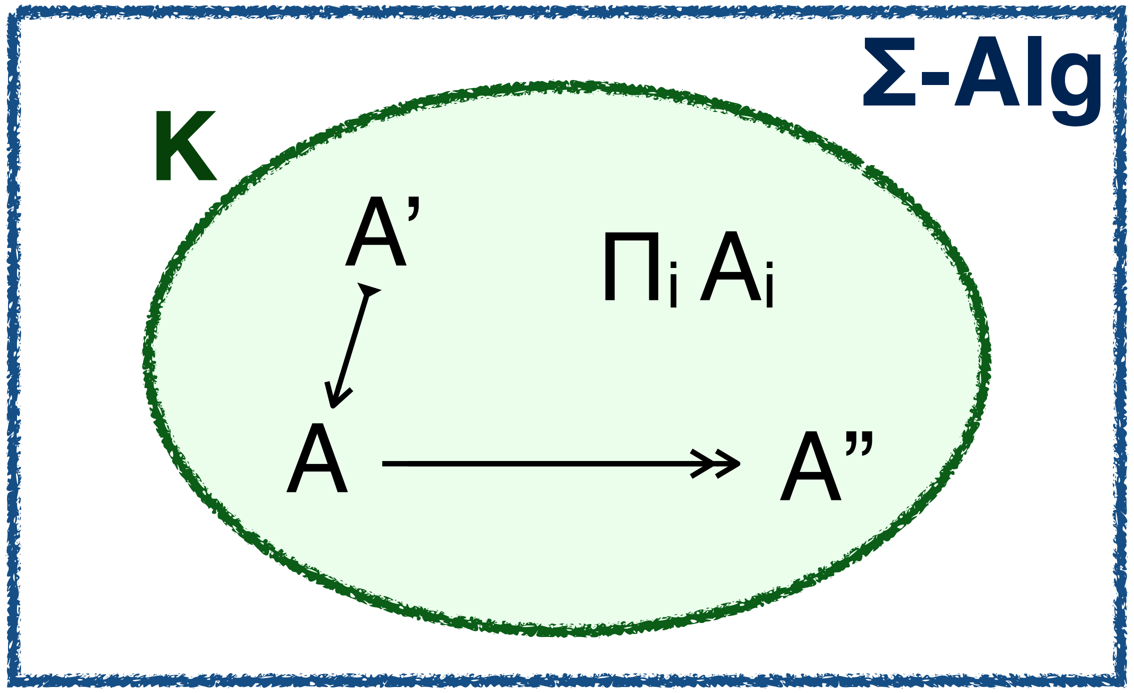
	metric equation $s =_\varepsilon t$	basic quantitative inference $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	metric implication $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_{R}, S, P, P_{U}	[Weaver 1995] S, P_{R} [Khudyakov 2003] S, P, L_{S}

背景: Variety Theorem

定理. [Birkhoff 1935] Σ-algebra のクラス K に対して
K は等式の族で定義可能 (= variety)
⇔ K は 商代数 (**H**), 部分代数 (**S**), 直積 (**P**) で閉じる

- 例: Σ = { ・ , e, (—)$^{-1}$} で
  群全体のクラス

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
$$x \cdot x^{-1} = e \qquad \text{etc.}$$



- 普遍代数における金字塔的定理
  「代数のどのような性質が等式で表現できるか」

Metric Algebra

[Weaver 1995] [Khudyakov 2003]

距離空間上の代数 (**metric algebra**) と

metric equation $\boxed{s =_{\varepsilon} t}$ を用いる

$\boxed{d(\llbracket s \rrbracket, \llbracket t \rrbracket) \leq \varepsilon}$

- 関数解析や作用素環への応用

後述

implicationで定義されたクラス

- **連続** な **quasivariety**に対する variety theorem

定理. [Weaver 1995] metric algebra のクラス K に対して、

K が implication $\bigwedge s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_{\varepsilon} t$ の**連続な**族で定義可能

⇔ K は 部分代数 (**S**) と 約積 (**P$_\mathbf{R}$**) で閉じる

Quantitative Algebra

[Mardare, Panangaden & Plotkin, LICS 2016]

計算効果の代数的理論 [Plotkin & Power, 2001] の量的拡張

- metric algebra + non-expansiveness
- 公理として **basic quantitative inference** を使う

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_{\varepsilon} t$$

$x_i,\ y_i$: 変数

$s,\ t$: 項

- 距離空間の構成 (Hausdorff距離, Kantorovich距離) が **自由代数** になる

部分集合の間の距離

確率測度の間の距離

- 完全な推論体系を与えた

修士論文の貢献

- metric / quantitative algebra の普遍代数的研究
  - variety theoremの証明

    (**strict variety** および **continuous variety**)
  - metric algebraに対する **congruence** の拡張

	metric equation $s =_\varepsilon t$	**basic quantitative inference** $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	**metric implication** $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

Strict Variety Theorem

	metric equation $s =_\varepsilon t$	basic quantitative inference $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	metric implication $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

Strict Variety Theorem

定理. [H. 2016] metric algebra のクラス K に対して、
K が metric equation の族で定義可能
⇔ K は 商代数 (H), 部分代数 (S), 直積 (P) で閉じる

- 古典的な variety theorem のナイーブな拡張
- 証明には **congruential pseudometric** を用いる

Congruential Pseudometric

- **congruence** の 距離バージョン

> **定義.** [this thesis] metric algebra $A = (A, d, \Sigma^A)$ に対して、
> A 上の pseudometric θ が **congruential**
> $:\Leftrightarrow \theta \leqq d$ かつ、関係 $\theta(x, y) = 0$ が congruence

- 商代数 A/θ が定義できる
- 普遍代数の定理が再現できる
  - 第一同型定理
  - 直積代数 $\leftrightarrow$ permutable congruential pseudometrics

証明の概略

定理. [H. 2016] K が metric equation の族で定義可能
⇔ K は 商代数 (**H**), 部分代数 (**S**), 直積 (**P**) で閉じる

証明. (⇐) Kで成立するmetric equationの全体をE.

A ⊨ E ⇒ A ∈ K を示せば良い：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_\Sigma A \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{T}_\Sigma A/\theta_{\mathcal{K}} \arrow[dl, dashed, two heads] \\
A &
\end{tikzcd}$$

$\theta_{\mathcal{K}}$: $\mathcal{T}_\Sigma A/\theta \in \mathcal{K}$ なる
congruential pseudometric θ の上限

自由代数

古典的な証明のcongruenceの代わりに
congruential pseudometric を使う

これで十分？ → NO！

距離等式は**表現能力が弱すぎる**

strict variety theorem の応用:
metric equation で定義可能
⇔ **商代数**, 部分代数, 直積 で閉じる

- 普遍代数として：<u>ノルム線形空間すら表せない</u>

  例: $x =_\varepsilon y \to \lambda x =_{|\lambda|\varepsilon} \lambda y$

- 計算効果への応用として：Hausdorff距離やKantorovich距離を自由代数として表せない

→ **basic quantitative inference** を使う

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$$

x_i, y_i: **変数**

s, t: **項**

ω-Variety & Continuous Variety

	metric equation $s =_\varepsilon t$	basic quantitative inference $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	metric implication $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

ω-Variety Theorem

[Mardare, Panangaden & Plotkin, 2017]

定理. [Mardare+, 2017] metric algebra のクラス K が basic quantitative inference の族で定義可能
⇔ K は 部分代数 (**S**), 直積 (**P**), ω-反射的商 (**H$_\omega$**) について閉じている

- 一般に、仮定を有限個にするのにテクニックが要る
  - 今回は、商についてサイズに関する制約 (H$_\omega$)
- [Weaver 1995], [Khudyakov 2003] と違って**連続性**がない

連続性条件

[Weaver 1995] [Khudyakov 2003]

	metric equation $s =_\varepsilon t$	basic quantitative inference $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	metric implication $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

連続性条件

[Weaver 1995] [Khudyakov 2003]

定義. [Khudyakov 2003] implicationの族 Φ が**連続的**

:⇔ $\bigwedge_{i=1}^{n} s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_{\varepsilon} t \ \in \Phi$ なら、

任意の ε’ > ε について δ > 0 が存在して、

$\bigwedge_{i=1}^{n} s_i =_{\varepsilon_i + \delta} t_i \to s =_{\varepsilon'} t \ \in \Phi$ である。

かつ、$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i =_0 y_i \to \sigma(\vec{x}) =_0 \sigma(\vec{y}) \ \in \Phi$

- implication の連続な族で定義されたクラスは、metric algebra の**完備化**と<u>**超積**</u>について閉じる

$\prod_i A_i / \mathcal{U}$

$\mathcal{U}$: 超フィルター

- 後者は「位相的に閉」[Kapovich+ 1995] → ロバストネス

Continuous Variety Theorem

	metric equation $s =_\varepsilon t$	basic quantitative inference $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	metric implication $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

Continuous Variety Theorem

定理. [this thesis] metric algebra のクラス K が、
basic quantitative inference の連続な族で定義可能
⇔ K は 部分代数 (**S**), 直積 (**P**), 反射的商 (**H_R**) および
び 超積 (**P_U**) について閉じている

- 超積は 有限性 + 連続性 のため
  - 商に関するサイズの条件は無い
- 証明には **距離空間上の自由代数** を用いる

既存研究との比較

- basic quantitative inference は [Mardare+ 2016] による
  - 距離空間上のK-自由代数は、Kで成り立つBQIで決まる

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Met} \arrow[u, shift left=2] \end{tikzcd}$$

- サイズに関する条件について、
  - [Mardare+ 2017] 商に対して条件 (H_ω)
  - [this thesis] 超積による (アイデアは[Weaver 1995])

	metric equation $s =_\varepsilon t$	basic quantitative inference $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	metric implication $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

今後の展望

- 圏論的な普遍代数論との関連、例えば：
  - monad & Eilenberg-Moore algebra (cf. [MacLane 1971])
  - factorization system [Adámek, Herrlich & Strecker 1990]
  - enriched Lawvere theory [Power 1999]
- 距離空間としての性質

  例：いつ自由代数が完備／コンパクトになるか？

まとめ

- **metric / quantitative algebra** の variety theorem (strict variety / continuous variety) を証明した
- metric algebra に対する congruence として **congruential pseudometric** を導入し調べた
  - 同型定理
  - 直積代数 ↔ permutable congruential pseudometric

参考文献 (一部)

- N. Weaver. *Quasi-varieties of metric algebras.* Algebra universalis, 33(1):1–9, 1995.
- V. A. Khudyakov. *Quasivarieties of metric algebras.* Algebra and Logic, 42(6):419–427, 2003.
- R. Mardare, P. Panangaden, and G. D. Plotkin. *Quantitative algebraic reasoning.* LICS 2016.
- P. Mardare, P. Panangaden, and G. D. Plotkin. *On the axiomatizability of quantitative algebras.* unpublished, 2017. http://people.cs.aau.dk/~mardare/papers/Quasi.pdf

対外発表リスト

査読付き論文

- Wataru Hino, Hiroki Kobayashi, Ichiro Hasuo and Bart Jacobs. *Healthiness from Duality.* LICS 2016.

投稿予定

- Wataru Hino. *Varieties of Metric and Quantitative Algebras.*

口頭発表

- Varieties of metric algebras. 数学基礎論若手の会 2016.
- Varieties, Quasivarieties and Prevarieties: Completing the Picture. CALCO 2015 Early Ideas.
- Quotient monads and their algebras. CSCAT 2015.

動機づけ

計算効果

$\mathtt{f}: \mathtt{int} \to \mathtt{int}$ は $[\![\mathtt{f}]\!]: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ と見なせないかも

- 非停止性
- 非決定性
- 副作用 (状態, 入出力)
- 大域的脱出 (継続)
- 確率的分岐

計算効果

モナドによる定式化

[Moggi, LICS 1989]

$\texttt{f}: \texttt{int} \to \texttt{int}$ を、$[\![\texttt{f}]\!]: \mathbb{Z} \to T\mathbb{Z}$ として解釈する

計算効果を表すモナド

例: 非決定性 $\mathcal{P}$， ステート $(- \times S)^S$， 入力 $(-)^I$

利点

- 様々な計算効果を同一の枠組みで扱える

欠点

- 計算効果の合成を統一的に扱えない
- 演算 (∨, read, write, etc.) を別途与える必要

普遍代数的定式化

[Plotkin & Power, FoSSaCS 2001]

operation + equation → free algebra

- 例: nondet. choice (∨) + semilattice の公理

$$x \vee x = x$$
$$x \vee y = y \vee x \quad \text{etc.}$$

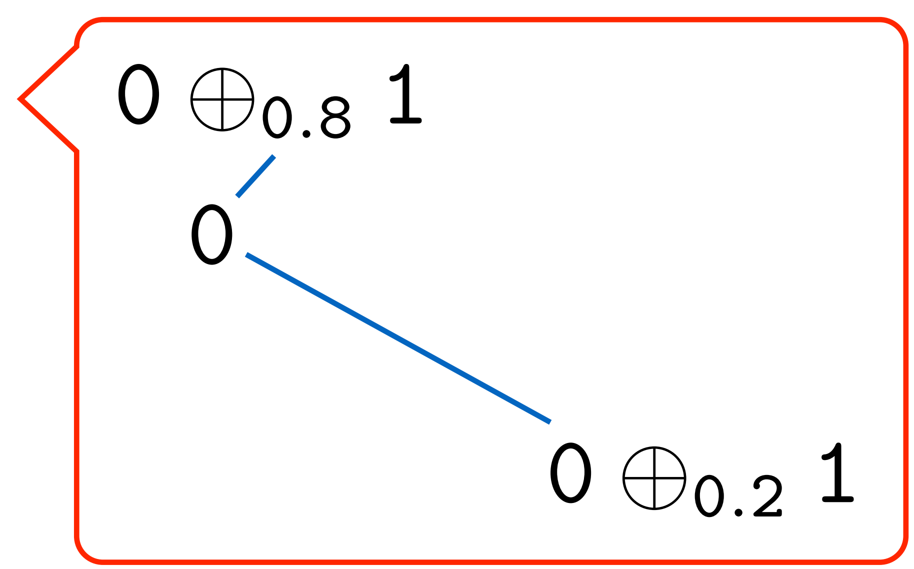
利点

- 計算効果の syntax に対応して自然な意味論
- 等式論理を用いて reasoning ができる
- 普遍代数で計算効果の合成を統一的に扱える

  [Hyland, Plotkin & Power, TCS 2006]

Quantitative algebraの理論へ

- 計算効果の代数的理論は、プログラムの**同一性**を推論する体系を与える
- 確率的プログラムに対しては、同一性だけでなく、**どのくらい近いか**を調べたい
    - **quantitative** な等式概念へ



Metric / Quantitative Algebra

- **metric algebra** = Σ-algebra (A, Σ^A) と A上の距離 d の対
  - 演算と距離の間に関係性を仮定しない
  - 定理によっては適宜、連続性などを仮定する
- **quantitative algebra** = metric algebra + <u>non-expansiveness</u>
  - 各演算 $\sigma^A : A^n \to A$ が non-expansive

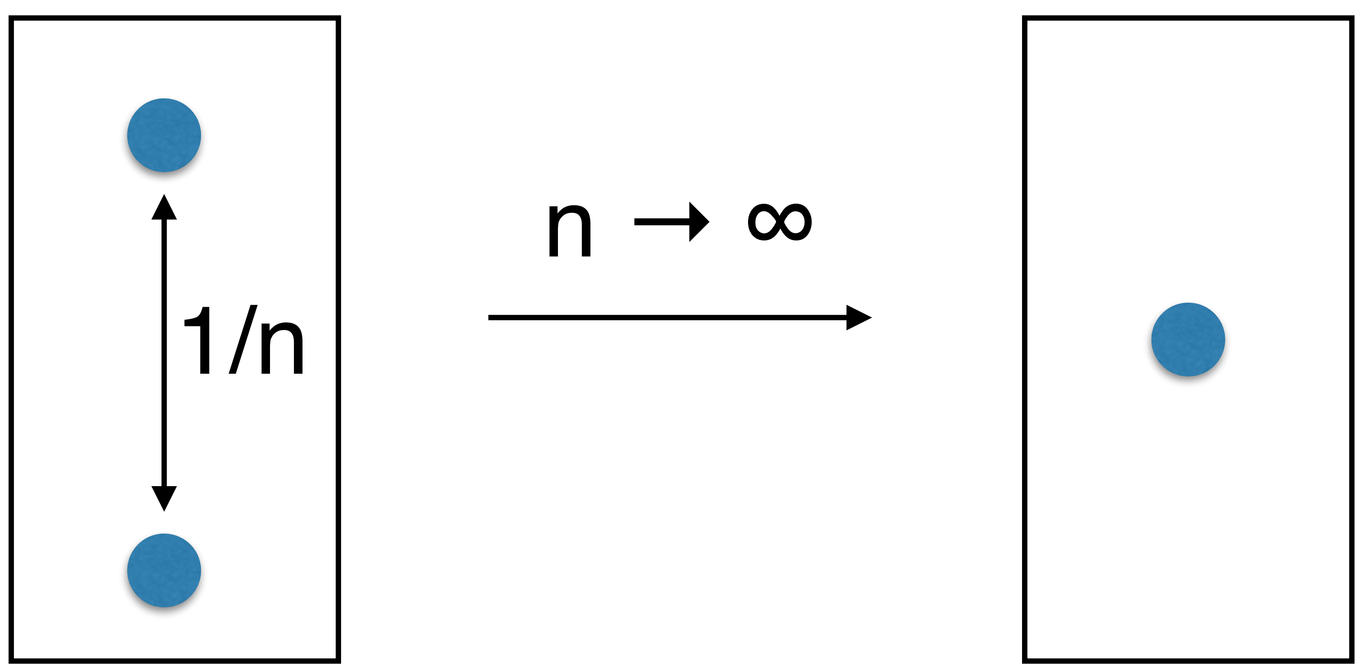
    $d(\sigma(\vec{x}), \sigma(\vec{y})) \leq \max_i d(x_i, y_i)$ for $\vec{x}, \vec{y} \in A^n$
  - 圏論的には自然：**距離空間の圏**での Σ-algebra
  - ノルム線形空間などを扱えない (例: “2倍”)

超積と
Gromov-Hausdorff Metric

超積 と Gromov-Hausdorff距離

- コンパクト距離空間全体のクラスに距離が定まる (Gromov-Hausdorff距離) [Gromov 1999]
  - 距離空間の収束や連続変形を扱える

例:



超積 と Gromov-Hausdorff距離

定理. [Kapovich+ 1995]　$\mathcal{U}:\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルター
コンパクト距離空間の列 $(X_n)_n$ が、Gromov-Hausdorff 距離について X に収束するとき、$X \simeq \prod X_n/\mathcal{U}$

距離代数の収束 : 距離代数の超積

位相的に閉なクラス : 超積で閉じたクラス

閉包条件

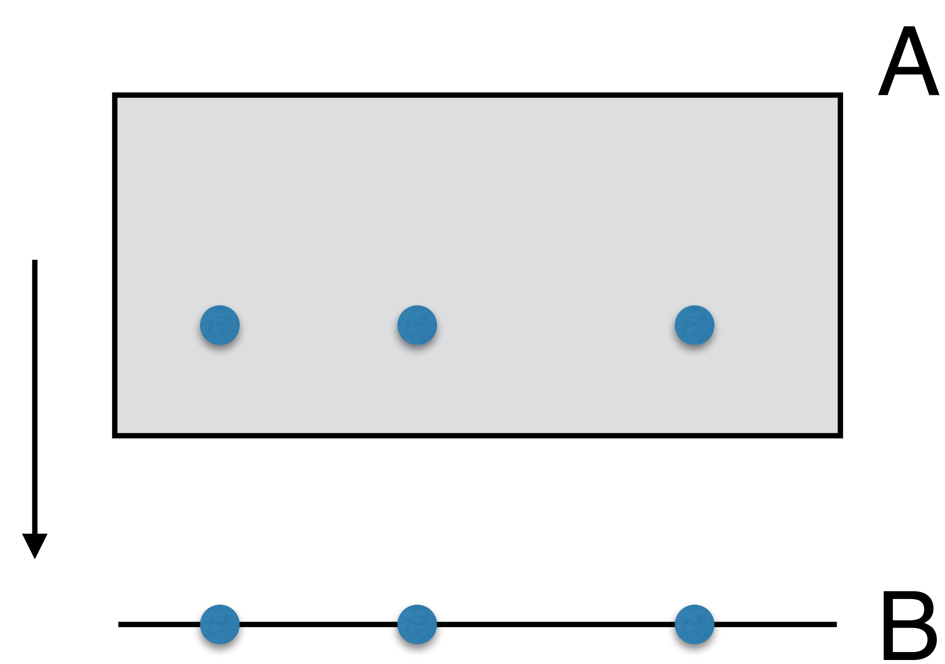
- H: 商代数， H_ω: ω-反射的商， H_R: 反射的商
- S: 部分代数， P: 直積
- P_U: 超積， P_R: 約積， P_{SR}: 部分超積

	metric equation $s =_\varepsilon t$	**basic quantitative inference** $\bigwedge_i x_i =_{\varepsilon_i} y_i \to s =_\varepsilon t$	**metric implication** $\bigwedge_i s_i =_{\varepsilon_i} t_i \to s =_\varepsilon t$
–	[H. 2016] H, S, P	[Mardare+ 2017] H_ω, S, P	[Mardare+ 2017] S, P_{SR}
continuous	—	[this thesis] H_R, S, P, P_U	[Weaver 1995] S, P_R [Khudyakov 2003] S, P, L_S

ω-反射的商

定義. metric algebraの射 $f : A \to B$ が **ω-反射的**
:⇔ 任意の有限部分集合 $B' \subset B$ に対して、有限部分集合 $A' \subset A$ が存在して、$f_{A'} : A' \to B'$ が等長同型

$$\begin{tikzcd} {}^{\exists}A' \arrow[r, dashed, "f_{A'}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & {}^{\forall}B' \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$



反射的商

定義. metric algebraの射 $f : A \to B$ が **反射的**

:$\Leftrightarrow$ 部分集合 $A' \subset A$ が存在して $f_{A'} : A' \to B$ が等長同型

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\exists}A' \arrow[ddrr, dashed, "f_{A'}"] & & \\
\cap & & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}
$$